

预条件共轭梯度法在大型振子阵列天线 RCS 分析中的应用

周后型, 洪 伟, 童创明

(东南大学毫米波国家重点实验室, 江苏南京 210096)

摘 要: 本文提出三重 Toeplitz 线性方程组预条件共轭梯度法, 并将该法与快速付里叶变换 (FFT) 结合. 这种结合算法称为 PCGFFT. 将 PCGFFT 应用于振子阵列天线的 RCS 分析中. 由于预条件器的使用, 系数矩阵的条件数得到了很大改善. 数值结果表明, PCGFFT 不仅降低了对计算机内存的需求, 加快了迭代速度而且提高了算法的收敛性.

关键词: 振子阵列天线; 雷达散射截面; 预条件共轭梯度法

中图分类号: TN011 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2001) 12-1601-04

Application of Preconditioned Conjugate Gradient Method to RCS Analysis of Large Dipole-Array Antennas

ZHOU Hou-xing, HONG Wei, TONG Chuang-ming

(State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: The preconditioned conjugate gradient method (PCG) for solving triple Toeplitz linear systems is put forward and is combined with the fast Fourier transform (FFT). The combining algorithm, called PCGFFT, is applied to RCS analysis of large dipole-array antennas. Because of the preconditioner, the condition number of the coefficient matrix is largely improved. The numerical results show that PCGFFT reduces the need for computer memory, speeds the iteration and enhances the convergence.

Key words: dipole-array antenna; radar cross-section; preconditioned conjugate gradient method

1 引言

在用矩量法 (MOM) 求解电磁问题的过程中, 所得线性方程组的系数矩阵是一个 n 阶满阵. 文献 [1] 首次详细地介绍了一种所需内存少, 且求解速度快的算法, 即共轭梯度法 (CG) 与快速付里叶变换 (FFT) 的结合算法 (CGFFT). 在应用中发现, 系数矩阵的条件数对共轭梯度法的收敛速度有很大影响. 事实上, FFT 的使用只是加快了共轭梯度法的迭代速度, 并没有改变其收敛速度. 共轭梯度法的收敛速度取决于系数矩阵的条件数. 本文在计算大型振子阵列天线的雷达散射截面 (RCS) 时, 采用了 PCGFFT, 即预条件共轭梯度法 (PCG) 与快速付里叶变换的结合算法. 基于 T. Chan 优化循环预条件器的基本原理, 给出三重 Toeplitz 矩阵预条件器的构造方法. 预条件器的使用使系数矩阵的条件数得到了很大改善. 数值结果表明, PCGFFT 不仅降低了对计算机内存的需求, 加快了迭代速度而且提高了算法的收敛性.

2 数学模型

平面阵列和圆柱阵列振子天线的几何结构如图 1 和图 2 所示. 每根振子长度为 L , 振子横截面半径为 a . 在平面阵列

中, x 方向的振子数目为 P , 相邻振子端点间距为 x ; y 方向的振子数目为 M , 相邻振子中心间距为 y . 在圆柱阵列中, 沿圆周方向均匀分布 M 根振子, 沿 x 方向的振子层数为 P , 层间相邻振子端点间距为 x . 对振子阵列天线进行 RCS 分析要考虑到振子间的互耦作用, 为此, 考虑振子阵列天线的 Pocklington 积分方程组 [2]

$$-4jk_0 E_t^{[u,v]}(x) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{P-1} \int_{-L/2}^{L/2} I^{[u,v]}(x) \frac{e^{-jkr(u,v)}}{r(u,v)} \cdot [(1+jkr(u,v)) \cdot (2r_{l(u,v)}^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r_{l(u,v)}^2] dx \quad (1)$$

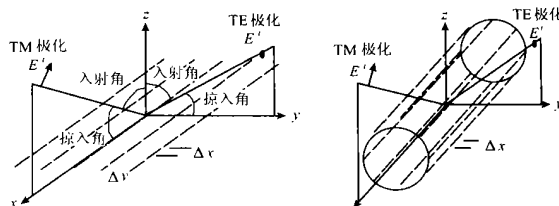


图 1 平面阵列与坐标系 图 2 圆柱阵列与坐标系

$u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, P - 1$, 其中 $E_t^{[u,v]}(x)$ 是入射

电场在第 $l(u, v)$ 根导线上的切向分量分布, $I^{l(u, v)}(x)$ 是第 $l(u, v)$ 根导线上的电流分布, $r_{(w, uv)}$ 是第 $l(u, v)$ 根导线上源点到第 $l(u, v)$ 根导线上场点的距离, j 是虚数单位, k 是自由空间波数. 将每根导线等分成 $N+1$ 段, 选用脉冲函数为基函数的 Galerkin 法将式 (1) 转化为线性方程组

$$TY = B \tag{2}$$

下面以平面阵列为例来说明广义阻抗矩阵 T 的构造. T 是一个 PMN 阶的三重对称复 Toeplitz 矩阵

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & \dots & T_{1-M} \\ \dots & \ddots & \dots \\ T_{M-1} & \dots & T_0 \end{bmatrix}, T_u = \begin{bmatrix} T_{(u,0)} & \dots & T_{(u,P-1)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ T_{(u,P-1)} & \dots & T_{(u,0)} \end{bmatrix},$$

$$T_{(u,v)} = \begin{bmatrix} T_{(u,v,0)} & \dots & T_{(u,v,1-N)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ T_{(u,v,N-1)} & \dots & T_{(u,v,0)} \end{bmatrix},$$

其中 T_{1-m} 是 T_{m-1} 的转置矩阵, 即 $T_{1-m} = T_{m-1}^T (m=2, 3, \dots, M)$, 而

$$I_{(u,v,w)} = \int_{-h}^{h+v(L+x)} \frac{1.5h}{(w+0.5)h+v(L+x)} \frac{e^{-jkr}}{r^5} \cdot [(1+jkr) \cdot (2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2] dx$$

$$I_{(u,v,-w)} = \int_{-h}^{h+v(L+x)} \frac{1.5h}{(w+0.5)h} \frac{e^{-jkr}}{r^5} \cdot [(1+jkr) \cdot (2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2] dx$$

$0 \leq u \leq M-1, 0 \leq v \leq P-1, 0 \leq w \leq N-1,$

$h = L/(N+1)$, 而

$$r = \begin{cases} \sqrt{a^2 + (x-x')^2}, & v=0 \\ \sqrt{(v-y)^2 + (x-x')^2}, & 1 \leq v \leq P-1 \end{cases}$$

广义电压列向量 B 的分块方法与 T 的分块方法相对应

$$B = [B_0^T, \dots, B_{M-1}^T]^T, B_u = [B_{(u,0)}^T, \dots, B_{(u,P-1)}^T]^T,$$

$$B_{(u,v)} = [b_{(u,v,0)}, \dots, b_{(u,v,N-1)}]^T$$

其中

$$b_{(u,v,w)} = -4jk \int_{-h}^{h+v(L+x)} \frac{E_z^{l(u,v)}(x) dx}{(w+0.5)h}$$

$0 \leq u \leq M-1, 0 \leq v \leq P-1, 0 \leq w \leq N-1$. 电流列向量 Y 有类似的分块结构.

3 预条件共轭梯度法 (PCG)

用预条件共轭梯度法求解线性代数方程组 (2) 的法方程

$$C^{-*} T^* T C^{-1} X = C^{-*} T^* B \tag{3}$$

其中, C 是一个适当选择的预条件器, C^{-*} 表示 C^{-1} 的共轭转置, 而 $X = CY$. 考虑到数值稳定性, 也为了减小对计算机内存需求, 采用共轭梯度法的析因形式^[4,7], 这样就不必生成线性方程组 (3) 的系数矩阵.

4 预条件器 C 的构造

根据 T. Chan 构造优化循环预条件器的基本思想^[3], 构造一个 PMN 阶的三重分块循环矩阵

$$C = \text{circ}[C_0, \dots, C_{M-1}],$$

$$C_u = \text{circ}[C_{(u,0)}, \dots, C_{(u,P-1)}],$$

$$C_{(u,v)} = \text{circ}[c_{(u,v,0)}, \dots, c_{(u,v,N-1)}],$$

(注: 本文对循环阵 (或分块循环阵) 用其第一列元 (或块) 来表示, 其中元素 $c_{(u,v,w)}$ 如下产生

$$\bar{c}_{(u,v,w)} = \frac{(N-w) \cdot I_{(u,v,w)} + w \cdot I_{(u,v,N-w)}}{N},$$

$$\hat{c}_{(u,v,w)} = \frac{(P-v) \cdot \bar{c}_{(u,v,w)} + v \cdot \bar{c}_{(u,P-v,w)}}{P},$$

$$c_{(u,v,w)} = \frac{(M-u) \cdot \hat{c}_{(u,v,w)} + u \cdot \hat{c}_{(M-u,v,w)}}{M},$$

$0 \leq u \leq M-1, 0 \leq v \leq P-1, 0 \leq w \leq N-1$. 在所有的 PMN 阶的三重分块循环矩阵中, C 极小化 Frobenius 范数

$\|C - T\|_F$. 在这个意义上, C^{-1} 被看作 T 的一个近似逆矩阵. TC^{-1} 的条件数可能比 T 的条件数小得多, 从而达到预条件的目的.

5 矩阵向量积 TX 的实现

第一步: 将 T 嵌入一个 $2PMN$ 阶的三重分块矩阵 τ

$$\tau = \begin{bmatrix} T_0 & V_0^T & V_1^T & \dots & V_{M-1}^T \\ V_0 & T_0 & \ddots & \ddots & \dots \\ T_1 & \ddots & \ddots & \ddots & T_1^T \\ \dots & \ddots & \ddots & T_0 & V_0^T \\ V_{M-1} & \dots & T_1 & V_0 & T_0 \end{bmatrix}$$

$$V_u = \begin{bmatrix} 0 & T_{(u,P-1)} & \dots & T_{(u,1)} \\ T_{(u+1,P-1)} & 0 & \ddots & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & T_{(u,P-1)} \\ T_{(u+1,1)} & \dots & T_{(u+1,P-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

$0 \leq n \leq M-2, V_{M-1} = 0$. τ 可以看成是一个 $2PMN$ 阶的二重对称复 Toeplitz 矩阵, 记为

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & \dots & T_{2PM-1}^T \\ \dots & \ddots & \dots \\ T_{2PM-1}^T & \dots & T_0 \end{bmatrix},$$

$$T_v = \begin{bmatrix} \hat{c}_{(v,0)} & \dots & \hat{c}_{(v,1-N)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \hat{c}_{(v,N-1)} & \dots & \hat{c}_{(v,0)} \end{bmatrix}$$

第二步: 将 T 嵌入一个 $8PMN$ 阶的循环矩阵 T (细节详见文献^[3]).

现在将 PMN 维的列向量 X 通过添加零元素扩展成一个 $8PMN$ 维的列向量 X , 使得 X 在 X 中的行号与 T 在 T 中的行号 (行号) 一致. 利用快速付里叶变换计算 TX , 从而得到 TX . 在计算 TX 的实际程序中, 只需要存储循环矩阵 T 的特征值^[3,7], 而不必存储 T .

6 方程组 $CY = X$ 的快速求解

在 PCG 算法中要涉及矩阵向量积 $C^{-1}X$. 事实上, 不必求出 C^{-1} , 因为求 $C^{-1}X$ 等价于解方程组 $CY = X$. 用 F_n 表示 n 阶离散付里叶矩阵^[8], F_n^* 是其共轭转置, 用 I_m 表示 m 阶单位矩阵, 用 \odot 表示矩阵张量运算^[6]. 如果 Z 是一个 n 维列向

量,则 $F_n Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{fft}(Z)$, $F_n^* Z = \sqrt{n} \text{ifft}(Z)$, 其中符号 fft 和 ifft 分别是表示快速付里叶正变换和逆变换. 方程组 $CY = X$ 等价于 $(I_{PM} \otimes F_N) Y = (I_{PM} \otimes F_N) X$ 其中矩阵的构造见附录. 记 $\tilde{Y} = (I_{PM} \otimes F_N) Y$, $\tilde{X} = (I_{PM} \otimes F_N) X$, 则方程组 $\tilde{Y} = \tilde{X}$ 等价于 N 个独立的方程组 $A_{(w)} \tilde{Y}_{(w)} = \tilde{X}_{(w)}$, 其中矩阵 $A_{(w)}$ 的构造见附录, 而列向量 $\tilde{Y}_{(w)}$, $\tilde{X}_{(w)}$ 分别由 \tilde{Y} , \tilde{X} 的与 $A_{(w)}$ 相对应的分量构成. 方程组 $A_{(w)} \tilde{Y}_{(w)} = \tilde{X}_{(w)}$ 等价于 $\tilde{Y}_{(w)} (I_M \otimes F_P) \tilde{Y}_{(w)} = (I_M \otimes F_P) \tilde{X}_{(w)}$, 其中矩阵 $\tilde{Y}_{(w)}$ 的构造见附录. 记 $\tilde{Y}_{(w)} = (I_M \otimes F_P) \tilde{Y}_{(w)}$, $\tilde{X}_{(w)} = (I_M \otimes F_P) \tilde{X}_{(w)}$, 则方程组 $\tilde{Y}_{(w)} = \tilde{X}_{(w)}$ 又等价于 M 个独立的方程组 $\tilde{A}_{(v,w)} \tilde{Y}_{(v,w)} = \tilde{X}_{(v,w)}$, 其中矩阵 $\tilde{A}_{(v,w)}$ 的构造见附录, 而列向量 $\tilde{Y}_{(v,w)} = \tilde{X}_{(v,w)}$ 分别由 $\tilde{Y}_{(w)}$, $\tilde{X}_{(w)}$ 的与 $\tilde{A}_{(v,w)}$ 相对应的分量构成. 方程组 $\tilde{A}_{(v,w)} \tilde{Y}_{(v,w)} = \tilde{X}_{(v,w)}$ 可以利用 FFT 来求解^[8]. 由此可见, 方程组 $CY = X$ 可以借助于快速付里叶变换求解. 在求解 $CY = X$ 的实际程序中, 只需要存储循环矩阵 $\tilde{A}_{(v,w)}$ 的特征值^[3,7], 而不必存储 C .

7 数值结果

CG,CGFFT 和 PCGFFT 都只是求解由矩量法所得线性方

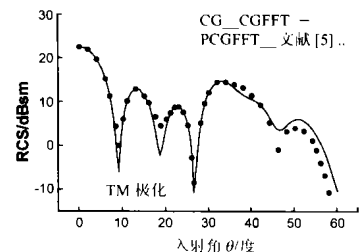
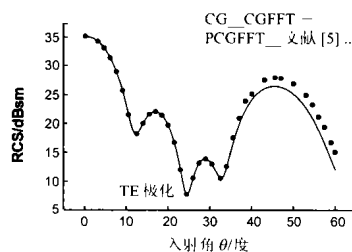
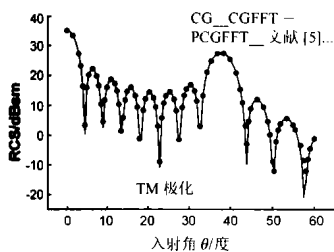


图3 平面阵列单站 RCS 值随入射角的变化 图4 平面阵列单站 RCS 值随入射角的变化 图5 圆柱阵列单站 RCS 值随入射角的变化

7.3 平面阵列的双站 RCS

设平面振子阵列天线为: x 方向排列 24 根振子, y 方向排列 32 根振子, $x = 0.35$, $y = 0.7$. (1) 入射平面波为 TM 波(水平极化), 入射角为 85 度. 图 6 是平面阵列的双站 RCS. CGFFT 耗 2198.78 秒. PCGFFT 耗 1151.02 秒. (2) 入射平面波为

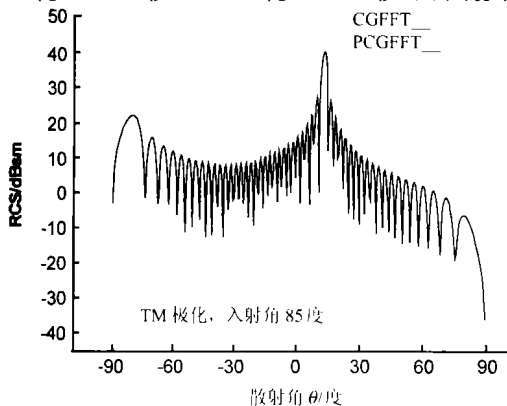


图6 平面阵列双站 RCS 值随散射角的变化

TE 波(垂直极化), 入射角为 85 度. 图 7 是平面阵列的双站 RCS. CGFFT 耗 1650.07 秒. PCGFFT 耗 682.4 秒. 通过上面的数值算例看到, 预条件器对改善系数矩阵条件数有明显的效果. 一般地, 阵列的电尺寸越大, 预条件的效果就越明显.

7.1 平面阵列的单站 RCS

设平面振子阵列天线为: x 方向排列 4 根振子, y 方向排列 8 根振子, $x = 0.35$, $y = 0.7$. (1) 入射平面波为 TM 波(水平极化). 图 3 是平面阵列的单站 RCS. CG 耗 4866.67 秒. CGFFT 耗 2131.66 秒. PCGFFT 耗 715.38 秒. (2) 入射平面波为 TE 波(垂直极化). 图 4 是平面阵列的单站 RCS. CG 耗 4004.29 秒. CGFFT 耗 1756.9 秒. PCGFFT 耗 682.4 秒.

7.2 圆柱阵列的单站 RCS

设圆柱形阵列天线为: 圆柱横截面周长 7, 柱面均匀分布 10 根振子, x 方向排列 4 层振子, $x = 0.35$. 入射平面波为 TM 波(水平极化). 图 5 是圆柱阵列的单站 RCS. CG 耗 14935.83 秒. CGFFT 耗 6423.09 秒. PCGFFT 耗 3149.87 秒.

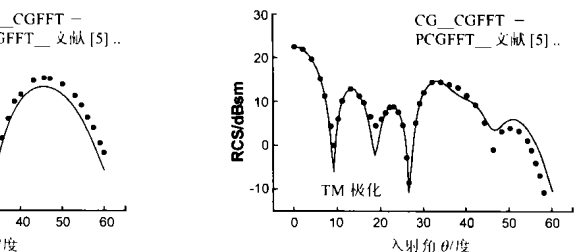


图7 平面阵列双站 RCS 值随散射角的变化

8 结论

本文介绍了如何在大型振子阵列天线的 RCS 分析中应用 PCGFFT. 预条件器的使用一方面减少迭代次数, 同时也使每一次迭代的运算量有所增加. 为此, 可采用不含旋转因子的素因子 FFT, 使附加的运算量尽可能降低. 实际上, 涉及预条件器的矩阵向量积可以并行化, 因此在有并行机的条件下, 附加运算量所耗 CPU 时间可以是很少的. 在电磁计算领域, 还有不少问题在用矩量法求解时都可以产生分块 Toeplitz 矩阵, 因此, PCGFFT 可望在电磁领域的更多问题中发挥作用.

附录

本文第 6 节中所涉及的矩阵如下:

(1) 矩阵 $A_{(u,v)}$ 的构造为

$$\begin{aligned} A_{(u,v)} &= \text{circ}[0, \dots, M-1], \\ u &= \text{circ}[(u,0), \dots, (u, P-1)], \\ (u,v) &= \text{diag}[(u,v,0), \dots, (u,v, P-1)]. \end{aligned}$$

其中 (u,v,w) 是 $A_{(u,v)}$ 的特征值, 可以利用 FFT 求得^[3,7].

(2) 矩阵 $A_{(u,w)}$ 的构造为

$$\begin{aligned} A_{(u,w)} &= \text{circ}[A_{(0,w)}, \dots, A_{(M-1,w)}] \\ A_{(u,w)} &= \text{circ}[(u,0,w), \dots, (u, P-1, w)]. \end{aligned}$$

(3) 矩阵 $\tilde{A}_{(u,w)}$ 的构造为

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(u,w)} &= \text{circ}[\tilde{A}_{(0,w)}, \dots, \tilde{A}_{(M-1,w)}], \\ \tilde{A}_{(u,w)} &= \text{diag}[\tilde{A}_{(u,0,w)}, \dots, \tilde{A}_{(u, P-1, w)}]. \end{aligned}$$

$\tilde{A}_{(u,v,w)}$ 是 $A_{(u,w)}$ 的特征值^[3,7], 可以利用 FFT 求得^[3,7].

(4) 矩阵 $\tilde{A}_{(v,w)}$ 的构造为

$$\tilde{A}_{(v,w)} = \text{circ}[\tilde{A}_{(0,v,w)}, \dots, \tilde{A}_{(M-1,v,w)}].$$

参考文献:

- [1] T K Sarkar, E Arvas, S M Rao. Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies [J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagat., 1986, AP-34(5): 635 - 640.

- [2] 盛剑霓. 电磁场数值分析 [M]. 科学出版社, 1984.
- [3] R Chan, M Ng. Conjugate gradient methods for Toeplitz systems [J]. SIAM Review, 1996, 38(3): 427 - 482.
- [4] R Chan, J Nagy, R Plemmons. Circulant preconditioned Toeplitz least squares iterations [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994, 15(1): 80 - 97.
- [5] 邓书辉, 阮颖铮. 振子阵列天线的雷达截面积 [J]. 电子科学学刊, 1992, 9: 496 - 501.
- [6] 毛纲源. 循环矩阵及其在分子振动中的应用 [M]. 华中理工大学出版社, 1995.
- [7] 周后型, 洪伟. 预条件共轭梯度法在辐射和散射问题中的应用 [J]. 电波科学学报, 2000, 4: 501 - 505.

作者简介:



周后型 男, 1956 年生于四川省. 1995 年于西南师范大学数学系获理学硕士学位. 现为东南大学应用数学系副教授, 并在该校毫米波国家重点实验室攻读博士学位. 研究方向为电磁场的数值计算.



洪伟 男, 1962 年生于河北省. 1988 年于东南大学获博士学位. 现为东南大学无线系教授、博士生导师、副主任. 在国内外权威学术刊物上发表论文 200 多篇, 学术专著一部. 获一项国家自然科学四等奖、两项国家教委科技进步一等奖等多项奖励. 获国家人事部“突出贡献中青年专家”等多项荣誉称号. 获“国家杰出青年基金”和国家教委“跨世纪优秀人才基金”等. 任多种国内外刊物, 如 IEEE Trans. on MIT, IEEE Trans. on AP, IEEE Trans. on CPMT, IEE Proc. - H, Electron. Lett., 《电子学报》, 《微波学报》, 《电波科学学报》等的审稿人或编委.